TRƯỜNG THPT SƠN TÂY

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 10 NĂM HỌC 2017-2018

Môn: Toán

Ngày thi: 02 tháng 04 năm 2018

Thời gian làm bài:180 phút (không kể thời gian giao đề)

(*Đề thi có 01 trang*)

Câu 1 (6,0 *điểm*)

a) Giải phương trình sau trên tập số thực: $4\sqrt{x+3}+2\sqrt{2x+7}=(x+1)(x^2+4x+2)$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^2+(8x-1)^2=2\sqrt[3]{x(16x+1)} \\ 2x(80x+1)=y\sqrt{28x-1} \end{cases}$.

Câu 2 (4,0 *điểm*) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn đường kính BD(AC không là đường kính). Gọi M,N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên $BC\,\&\,BD$; P là giao điểm của $MN\,\&\,AC$. Biết rằng $AC: x-y-1=0,\ M(0;4), N(2;2)$ và điểm A có hoành độ nhỏ hơn 2. Hãy tìm tọa độ các điểm P,A,B.

Câu 3 (4,0 *điểm*) Cho $AB\,\&\,AC$ là hai tia phân biệt không cùng nằm trên một đường thẳng. ω là đường tròn tâm O, tiếp xúc với AC tại E và tiếp xúc với AB tại F. R là một điểm trên đoạn EF. Đường thẳng qua O, song song với EF cắt AB tại P. Gọi N là giao điểm của $PR\,\&\,AC$, M là giao điểm của đường thẳng qua R, song song với AC và AB. Chứng minh rằng MN là tiếp tuyến của ω.

Câu 4 (4,0 *điểm*) Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{8}{(a+b)^2+4abc}+\frac{8}{(b+c)^2+4abc}+\frac{8}{(a+c)^2+4abc}+a^2+b^2+c^2\geq\frac{8}{a+3}+\frac{8}{b+3}+\frac{8}{c+3}.$$

Câu 5 (2,0 *điểm*) Ký hiệu $\mathbb{Z}_+$ là tập hợp các số nguyên dương. Hãy tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{Z}_+\to\mathbb{Z}_+$ sao cho $n+f(m)\mid f(n)+nf(m)$ với mọi $m,n\in\mathbb{Z}_+$.

-----HẾT-----

Thí sinh không được sử dụng máy tính cầm tay. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh: .... Số báo danh: ....

ĐÁP ÁN SƠ LƯỢC

<u>Câu 1.</u> a) $4\sqrt{x+3}+2\sqrt{2x+7}=(x+1)(x^2+4x+2).$

Điều kiện: $x\ge -3.$

Biến đổi phương trình đã cho tương đương với

$$4\left(\sqrt{x+3}-2\right)+2\left(\sqrt{2x+7}-3\right)=x^3+5x^2+6x-12$$

$$\Leftrightarrow \frac{4(x-1)}{\sqrt{x+3}+2}+\frac{4(x-1)}{\sqrt{2x+7}+3}=(x-1)(x^2+6x+12)$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{4}{\sqrt{x+3}+2}+\frac{4}{\sqrt{2x+7}+3}-(x+3)^2-3\right)=0. \qquad (1)$$

Vì $x\ge -3$ nên $\sqrt{x+3}\ge 0$ và $\sqrt{2x+7}\ge 1.$ Suy ra $\frac{4}{\sqrt{x+3}+2}+\frac{4}{\sqrt{2x+7}+3}\le 3,$ vì vậy

$$\frac{4}{\sqrt{x+1}+2}+\frac{4}{\sqrt{2x+3}+3}-(x+3)^2-3<0.$$

Do đó nghiệm của phương trình đã cho là $x=1.$

b) Giải hệ $\begin{cases} y^2+(8x-1)^2=2\sqrt[3]{x(16x+1)} \\ 2x(80x+1)=y\sqrt{28x-1} \end{cases}$. Đk $x\ge \frac{1}{28}$

Hệ tương đương với $\begin{cases} y^2+64x^2-16x+1=\sqrt[3]{8x(16x+1)} \\ 4x(80x+1)-2y\sqrt{28x-1}=0 \end{cases}$. Cộng vế với vế hai phương trình trên ta được

$$\left(y-\sqrt{28x-1}\right)^2+384x^2-40x+2=\sqrt[3]{8x(16x+1)}.$$

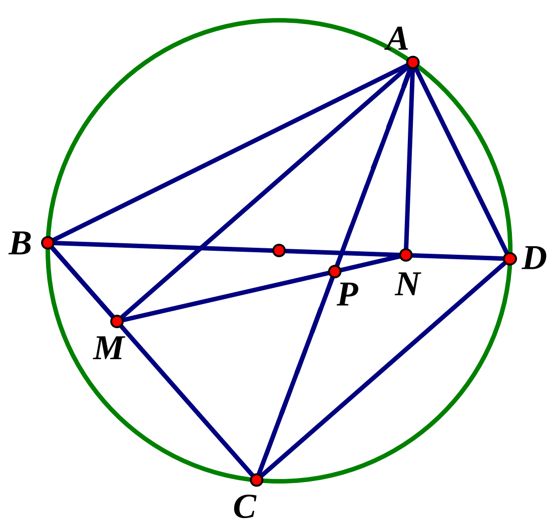
$$VT\ge 384x^2-40x+2=\frac{1}{2}\left[3(16x-1)^2+16x-1\right]\ge \frac{1}{2}(16x+1)=\frac{1}{6}(32x+16x+1+2)\ge \frac{1}{2}\sqrt[3]{32x(16x+1)2}=VP$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x=\frac{1}{16} \\ y=\sqrt{28x-1}=\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$. Đối chiếu điều kiện và thử lại thấy thỏa mãn.

<u>Câu 2.</u> + Tìm được $MN: x-y-4=0$ & $P\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right)$.

+ Chứng minh được tứ giác ABMN nội tiếp $\Rightarrow PA=PM$, kết hợp với $A\in AC$ & $x_A<2\Rightarrow A(0;-1)$.

+ Lập phương trình BD, BC suy ra $B(-1;4)$



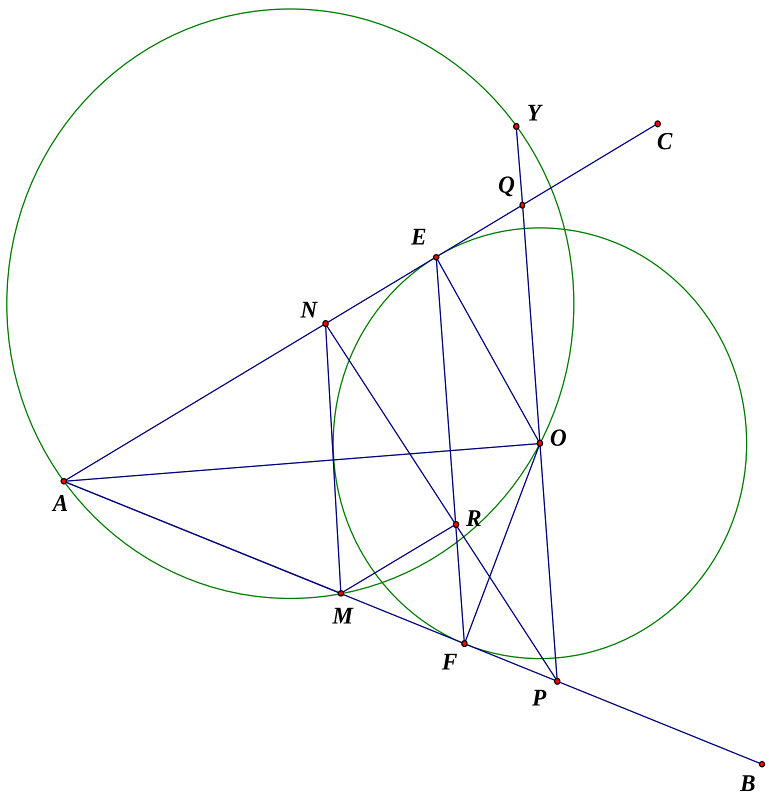
Câu 3. Qua N kẻ tiếp tuyến với đường tròn ω với tiếp điểm là $X \neq E$ cắt AB tại M'. Ta chứng minh M'R song song với AC tức là suy ra được M' trùng với M(đpcm).
+ Giả sử PO cắt AC tại Q và cắt (AM'O) tại Y.
+ Chứng minh được tam giác M'YP đồng dạng với tam giác EOQ (1)
vì $\angle M'PQ = \angle EQO$ & $\angle EOQ = \angle FOP = 90^0 - \angle AOF = \angle M'AO = \angle M'YP$

+ Mặt khác $\angle M'OP = \angle M'\mathrm{OF} + \angle FOP = \frac{1}{2}(\angle FOX + \angle FOP + \angle EOQ) = \frac{1}{2}(180^0 - \angle XOE)$

$\angle FOP = \frac{1}{2}(\angle FOP + \angle EOQ), \angle M'\mathrm{OF} = \frac{1}{2}\angle FOX = \frac{1}{2}(180^0 - \angle XOE) = 90^0 - \frac{1}{2}\angle XOE$.

Do đó $\angle AYM' = \frac{1}{2}\angle XOE = \angle NOE$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{AM'}{NE} = \frac{YM'}{OE} = \frac{M'P}{EQ}$ suy ra M'R song song với AC.



Câu 4. Do $2ab \le a^2 + b^2 \Rightarrow (a+b)^2 \le 2(a^2+b^2)$ và $4abc \le 2c(a^2+b^2)$.

Vậy ta có $(a+b)^2 + 4abc \le 2(a^2+b^2)(c+1) \Rightarrow \frac{8}{(a+b)^2 + 4abc} \ge \frac{4}{(a^2+b^2)(c+1)}$

Áp dụng BĐT AM-GM $\frac{4}{(a^2+b^2)(c+1)} + \frac{a^2+b^2}{2} \ge 2\sqrt{\frac{2}{c+1}} = \frac{4}{\sqrt{2(c+1)}}$

Mặt khác $\frac{c+3}{8} = \frac{c+1+2}{8} \ge \frac{\sqrt{2(c+1)}}{4}$, do đó $\frac{4}{(a^2+b^2)(c+1)} + \frac{a^2+b^2}{2} \ge \frac{8}{c+3}$, biến đổi tương tự ta được điều phải chứng minh.

Câu 5. Ký hiệu $\mathbb{Z}_+$ là tập hợp các số nguyên dương. Hãy tìm tất cả các hàm $f: \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ sao cho $n + f(m) \mid f(n) + nf(m)$ với mọi $m, n \in \mathbb{Z}_+$.

Dễ thấy $n+f(m)\mid f(n)+nf(m)\Rightarrow n+f(m)\mid f(n)+nf(m)-n\big(n+f(m)\big)=f(n)-n^2$ (1).

+ Cho $(n,m)=(1,1)$ ta thu được $1+f(1)\mid f(1)-1\Rightarrow f(1)=1$

+ Cho $(n,m)=(n,n)$ ta thu được

$n+f(n)\mid f(n)+nf(n)\Rightarrow n+f(n)\mid(n+1)\big(n+f(n)\big)-f(n)-nf(n)=n^2+n$ (2)

Do đó $n=2\Rightarrow 2+f(2)\mid 6\Rightarrow f(2)=1\vee f(2)=4$

+ Nếu $f(2)=1$, cho $(n,m)=(2,m)$ ta được

$2+f(m)\mid 1+2f(m)\Rightarrow 2+f(m)\mid 2\big(2+f(m)\big)-\big(1+2f(m)\big)=3\Rightarrow f(m)=1$ với mọi m nguyên dương.

+ Nếu $f(2)=4$ ta sẽ chứng minh quy nạp $f(n)=n^2$

Giả sử $f(n-1)=(n-1)^2$

Từ (1) ta được $n+(n-1)^2\mid f(n)-n^2\Rightarrow n^2-n+1\mid n^2-f(n)$

Từ (2) ta được $n+f(n)\mid n+n^2\Rightarrow f(n)\le n^2$.

Nếu $f(n)\ne n^2\Rightarrow n^2-f(n)=n^2-n+1\Rightarrow f(n)=n-1$

Do đó $n+n-1\mid n+n^2$ vô lý vì vế trái là số lẻ còn vế phải là số chẵn. Do đó $f(n)=n^2$.

Vậy $f(n)=1\vee f(n)=n^2$, thử lại thấy thỏa mãn.